# 第 8 講　約数と倍数

# PART1　最小公倍数と最大公約数

**1**　$a<b<c$ を満たす 3 つの自然数 $a$，$b$，$c$ がある。次の(i)，(ii)，(iii)を同時に満たす $a$，$b$，$c$ をすべて求めよ。

(i)　$a$，$b$，$c$ の最大公約数は 45

(ii)　$b$ と $c$ の最大公約数は 225，最小公倍数は 1350

(iii)　$a$ と $b$ の最小公倍数は 3150

**Point Pickup**

2 つの自然数 $a$，$b$ の最大公約数を $G$ とすると

$$a=a'G,\ b=b'G\quad (a' \text{ と } b' \text{ は互いに素})$$

と表される。このとき，$a$，$b$ の最小公倍数を $L$ とすると

$$L=a'b'G$$

と表される。よって，$ab=GL$ である。

# 第 8 講　PART1　確認問題

**1**　$a<b<c$ を満たす 3 つの自然数 $a$, $b$, $c$ がある。次の (i), (ii), (iii)を同時に満たす $a$, $b$, $c$ の組をすべて求めよ。

(i)　$a$, $b$, $c$ の最大公約数は 24

(ii)　$b$ と $c$ の最大公約数は 72，最小公倍数は 1080

(iii)　$a$ と $b$ の最小公倍数は 1512

$(a,\ b,\ c)=($ アイウ , エオカ , キクケ $)$

# 第 8 講　約数と倍数

## PART1　最小公倍数と最大公約数

**1**　$a<b<c$ を満たす 3 つの自然数 $a$, $b$, $c$ がある。次の(i), (ii), (iii)を同時に満たす $a$, $b$, $c$ をすべて求めよ。

(i)　$a$, $b$, $c$ の最大公約数は 45

(ii)　$b$ と $c$ の最大公約数は 225，最小公倍数は 1350

(iii)　$a$ と $b$ の最小公倍数は 3150

(ii)より，$b$ と $c$ の最大公約数は 225 であるから

$b=225b'=3^2\cdot5^2\cdot b'$，$c=225c'=3^2\cdot5^2\cdot c'$（$b'$，$c'$ は互いに素な自然数で，$b'<c'$）

と表される。また，$b$ と $c$ の最小公倍数は 1350 であるから

$225b'c'=1350$　よって　$b'c'=6$

これを満たす $b'$，$c'$ は　$(b', c')=(1, 6), (2, 3)$

したがって　$(b, c)=(225, 1350), (450, 675)$

(i)より，$a$，$b$，$c$ の最大公約数は $45=3^2\cdot5$ であるから

$a=45a'=3^2\cdot5\cdot a'$（$a'$ は 5 の倍数ではない自然数）

(iii)より，$a$ と $b$ の最小公倍数は $3150=2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7$

$b=225=3^2\cdot5^2$ のとき

$a=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$ であるが，これは $a<b$ を満たさず不適。

$b=450=2\cdot3^2\cdot5^2$ のとき

$a=3^2\cdot5\cdot7$ または　$a=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$ であり，$a<b$ を満たすものは $a=3^2\cdot5\cdot7$ である。

よって　$a=315$

以上より　$(a, b, c)=(315, 450, 675)$

# 第 8 講　PART1　確認問題 解答

**1** **[正解]** アイウ：168，エオカ：216，キクケ：360

**[解説]**

(ii)より，$b$ と $c$ の最大公約数は 72 であるから

$b=72b'=2^3\cdot3^2\cdot b'$，◀[A]

$c=72c'=2^3\cdot3^2\cdot c'$

（$b'$，$c'$ は互いに素な自然数で，$b'<c'$）

と表される。

また，$b$ と $c$ の最小公倍数は 1080 であるから

$72b'c'=1080$ ◀[A]

よって　$b'c'=15$

これを満たす自然数 $b'$，$c'$ は，$b'<c'$ より

$(b',\ c')=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$

したがって

$(b,\ c)=(72,\ 1080),\ (216,\ 360)$ ……(＊)

(i)より，$a$，$b$，$c$ の最大公約数は $24=2^3\cdot3$ であるから

$a=24a'=2^3\cdot3\cdot a'$

（$a'$ は 3 の倍数ではない自然数）◀[B]

(iii)より，$a$ と $b$ の最小公倍数は　$1512=2^3\cdot3^3\cdot7$

(＊)より

$b=72=2^3\cdot3^2$ のとき

$a=2^3\cdot3\cdot7=168$ であるが，これは $a<b$ を満たさず不適。

$b=216=2^3\cdot3^3$ のとき

$a=2^3\cdot3\cdot7=168$ であり，これは $a<b$ を満たす。よって　$a=168$

以上より

$(a,\ b,\ c)=$**(168，216，360)**

> [A]　2 つの自然数 $a$，$b$ の最大公約数を $G$ とすると
> $a=a'G$，　$b=b'G$
> （$a'$ と $b'$ は互いに素）
> と表される。このとき，$a$，$b$ の最小公倍数を $L$ とすると
> $L=a'b'G$
> と表される。よって
> $ab=GL$

> [B]　$a'$ が 3 を約数にもつと，$a$，$b$，$c$ の最大公約数が 24 より大きくなってしまう。